

# 不确定系统的鲁棒迭代学习控制方法

孙明轩, 蒋超楠, 李彦威

浙江工业大学信息工程学院, 杭州310023

E-mail: mxsun@zjut.edu.cn

**摘要:** 针对不确定动态系统, 基于Lyapunov第二方法的传统鲁棒控制采用断续函数连续化方法(如单位向量连续化), 能够保证系统中所有变量有界, 并将跟踪误差控制到原点的某个邻域内. 文中提出一种能够实现零误差跟踪的鲁棒迭代学习控制方法, 首先按照传统鲁棒控制方法设计控制器, 继而在尽可能少改动的前提下增加学习机制, 以改善传统鲁棒控制器的跟踪性能. 同时, 为了使得参数估计囿于一预先确定的范围内, 控制器中的学习部分采用了完全限幅形式.

**关键词:** 鲁棒控制, 迭代学习控制, 收敛性, 不确定系统

## An Approach of Robust Iterative Learning Control for Uncertain Systems

Mingxuan Sun, Chaonan Jiang, Yanwei Li

College of Information Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou, 310023

E-mail: mxsun@zjut.edu.cn

**Abstract:** By applying Lyapunov's second method, the traditional robust control approach to controller design explicitly deals with uncertainty. The controller designs can be conducted through modifying the discontinuous control synthesis, e.g., the unit vector continuous robust control method. The robust control guarantees all the variables in the closed-loop system are bounded and make the tracking error converge to a neighborhood of the origin. With minimal modification to the existing robust control design, in this paper, a robust iterative learning control approach is proposed by installing the iterative learning mechanism. It is shown that the tracking error converges to zero, as iteration increases, and the tracking performance is improved dramatically. In addition, the fully saturated learning is shown useful in order to make the estimated parameters are enforced to stay in the pre-specified range.

**Key Words:** Robust control, iterative learning control, convergence, uncertain systems

### 1 引言(Introduction)

对于实际系统而言, 由于存在外部扰动以及未建模动态等因素, 其精确模型很难得到. 在对系统进行控制器设计和实现时需考虑系统动力学模型中存在的确定性. 传统的鲁棒控制技术不需要知道不确定性的精确模型, 只需通过估计不确定性的最坏情况以保证系统的稳定性, 使得跟踪误差收敛到原点的邻域内<sup>[1, 2, 3]</sup>. 但传统的鲁棒控制无法实现系统的零误差跟踪, 否则会导致系统出现颤振现象.

迭代学习控制适用于具有重复运动性质的被控对象, 可以实现有限区间上系统零误差跟踪性能<sup>[4]</sup>. 它不需要建立精确的系统模型, 算法简洁, 且控制性能会随迭代过程的重复而不断提高. 但迭代学习控制技术要求系统参数或动态不确定性具有严格的重复性或周期性, 否则系统跟踪性能将会降低. 在通常情

况下, 实际系统中往往同时存在多种不确定性, 包括重复的或不可重复的, 周期的或非周期的, 参数的或非参数的等等. 为此, 单一的迭代学习控制方法不能完全抑制系统中存在的不确定性, 达到理想的控制效果.

目前, 引人关注的是学习控制系统设计和分析的Lyapunov方法<sup>[5, 6, 7, 8]</sup>. 这种方法能够有效解决迭代学习控制的初值问题和变轨迹跟踪问题. 为了弥补鲁棒控制技术只能实现跟踪误差收敛到原点的邻域内的不足, 在传统鲁棒控制的基础上应用迭代学习控制方法, 实现系统的零误差跟踪控制. 文献[9]提出了一种结合变结构控制的鲁棒迭代学习控制方法, 其中变结构控制部分采用饱和函数代替符号函数来消除抖动. 而文献[10]的鲁棒控制部分采用连续化的方法来消除抖动, 但其连续化的过程对符号函数的改动较大. 文献[11]应用Lyapunov方法, 提出了鲁棒迭代学习控制算法, 要求系统中的不确定性满足范数有界和局部一致Lipschitz连续条件. 文献[12, 13, 14]在控制器中

此项工作得到国家自然科学基金资助, 项目批准号: 61174034, 61374103, 61573320.

分别采用投影算法和饱和函数对控制量或者参数估计进行限幅, 增强系统的鲁棒性.

本文讨论一类不确定系统的鲁棒迭代学习控制问题. 在系统不确定性界函数已知的情况下, 分别设计传统鲁棒控制器和鲁棒迭代学习控制器. 其中, 不确定特性的参数估计采用饱和函数, 使得参数估计囿于一预先给定的界. 分析表明, 传统鲁棒控制只能实现系统跟踪误差收敛到原点的邻域内, 鲁棒迭代学习控制明显改善了传统鲁棒控制的控制效果, 可实现系统的零误差跟踪.

## 2 问题提出(Problem Formulation)

考虑在有限时间区间 $[0, T]$ 上重复作业的不确定系统

$$\dot{x}(t) = Ax + B[\eta(x, t) + u(t)] \quad (1)$$

其中 $x(t) \in \mathbf{R}^n$  是系统的状态向量,  $u(t) \in \mathbf{R}$  是控制输入,  $\eta(x, t) \in \mathbf{R}$  表示不确定特性, 参数矩阵 $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$  和 $B \in \mathbf{R}^n$  具有如下形式

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

且标称系统 $\{A, B\}$  完全可控.

定义跟踪误差 $e = x - x_d$ . 由式(1)知, 误差动态方程为

$$\dot{e} = Ae + B[\eta(x, t) + u - \dot{x}_{dn}] \quad (2)$$

与传统鲁棒控制设计相同, 假设不确定特性 $\eta(x, t)$  满足

$$|\eta(x, t)| \leq \rho(x, t) \quad (3)$$

这里,  $\rho(x, t)$  为一已知的连续函数. 进一步地, 为了方便学习控制器设计, 假设 $\eta(x, t)$  也满足

$$|\eta(x, t) - \eta(x_d, t)| \leq \alpha(x, x_d, t)\|e\| \quad (4)$$

这里,  $\alpha(x, x_d, t)$  为一已知的连续函数.

对标称系统(1), 我们需要进行状态反馈控制器设计,

$$u = -Kx + u_1 \quad (5)$$

其中,  $K$  为状态反馈矩阵,  $u_1$  为待设计的鲁棒学习控制器, 以使得反馈控制后的标称系统是渐近稳定的, 也即系统矩阵 $\{A - BK\}$  稳定的. 记 $A_K = A - BK$ . 这样, 对于给定的正定对称矩阵 $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ , 存在正定对称矩阵 $P \in \mathbf{R}^{n \times n}$  满足Lyapunov 方程

$$A_K^T P + P A_K = -Q$$

文中将矩阵 $Q$ 的最小特征值记为 $\lambda_{Q \min}$ .

对于不确定系统(1), 给定期望状态轨迹 $x_d$ . 控制目标是在不确定特性 $\eta(x, t)$  存在的情形下, 设计控制器使得闭环系统实际状态零误差跟踪上期望轨迹. 采用状态反馈控制(5), 误差动态方程(2)变成

$$\dot{e} = A_K e + B[Ke + \eta(x, t) + u - \dot{x}_{dn}] \quad (6)$$

为了实现这一控制目标, 我们提出的控制器设计方法包括两步:

- i) 对于不确定系统(1), 按照传统鲁棒控制方法设计控制器, 能够将跟踪误差控制到原点的某个邻域内;
- ii) 在传统鲁棒控制器中增加学习机制(做尽可能少的改动), 以使得跟踪误差控制收敛于零.

## 3 鲁棒控制(Robust Control)

对于不确定系统(1), 按照传统鲁棒控制方法, 设计如下控制律

$$u = u_r - Ke + \dot{x}_{dn} \quad (7)$$

$$u_r = -\rho \frac{\mu}{|\mu| + \varepsilon} \quad (8)$$

其中,  $\varepsilon > 0$  是可调参数,  $\mu = B^T P e \rho$ .

我们将采用鲁棒控制器(8)的闭环系统跟踪性能总结为下述定理.

**定理1** 对于满足式(3)的系统(1), 在传统鲁棒控制律(7) (8) 的作用下系统的跟踪误差收敛到原点的邻域内, 同时保证闭环系统中所有变量一致有界.

**证明** 考虑如下形式连续可导的Lyapunov 函数

$$V(e, t) = \frac{1}{2} e^T P e \quad (9)$$

满足

$$\frac{1}{2} \lambda_{P \min} \|e\|^2 \leq V(e, t) \leq \frac{1}{2} \lambda_{P \max} \|e\|^2 \quad (10)$$

其中 $\lambda_{P \min}$ ,  $\lambda_{P \max}$  分别为矩阵 $P$  的最小特征值和最大特征值.

对式(9)中给定的Lyapunov 函数进行求导, 并将式(6) 及控制律(7) (8)代入得

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2} (\dot{e}^T P e + e^T P \dot{e}) \\ &= -\frac{1}{2} e^T Q e + e^T P B (Ke + \eta + u - \dot{x}_{dn}) \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \|e\|^2 - \frac{|\mu|^2}{|\mu| + \varepsilon} \\ &\quad + |e^T P B| \rho \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \|e\|^2 + \varepsilon \end{aligned} \quad (11)$$

由上式可知, 当 $\|e\| \geq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda_{Q \min}}}$  时,  $\dot{V} \leq 0$ . 可以看出,  $e$  一致有界. 由于 $x_d$  是连续可导的期望轨迹, 故 $x$  有界. 由式(3)推知 $\rho$  有界. 进一步由式(7) (8)可知,  $u, u_r$  均一致有界. ■

上述分析表明,传统鲁棒控制只能保证跟踪误差收敛到原点的邻域内,并不能完全消除跟踪误差.特别是,当 $\varepsilon$ 足够小时

$$u_r = -\rho \frac{\mu}{|\mu| + \varepsilon} \approx -\rho \text{sgn} \mu$$

通常,控制器中采用 $-\rho \text{sgn} \mu$ 会导致系统出现颤振现象.反之,当 $\varepsilon$ 取值过大时,则系统的跟踪精度难以保证.

#### 4 鲁棒迭代学习控制(Robust Iterative Learning Control)

由上一节可知,传统鲁棒控制可有效的处理系统中界函数已知的不确定性,保证系统的稳定性,使跟踪误差收敛到原点的邻域内.但传统鲁棒控制无法实现系统的零误差跟踪.迭代学习控制适用于有限区间上重复运行的被控对象,在严格重复条件的假设下,可实现有限时间区间内参考轨迹的完全跟踪.因此,在传统鲁棒控制的基础上应用迭代学习控制是一种十分有效的控制策略.

记 $\eta(x_d, t) = \theta$ , 假设 $|\eta(x_d, t)| \leq \theta_{\max}$ . 设计如下鲁棒迭代学习控制律

$$u_k = u_{r,k} - \hat{\theta}_k - K e_k + \dot{x}_{dn} \quad (12)$$

$$\hat{\theta}_k^* = \hat{\theta}_{k-1} + \gamma B^T P e_k \quad (13)$$

$$\hat{\theta}_k = \text{sat}(\hat{\theta}_k^*) \quad (14)$$

$$u_{r,k} = -(\alpha_k \|e_k\| + 2\theta_{\max}) \frac{\mu_k}{|\mu_k| + \varepsilon} \quad (15)$$

其中 $\mu_k = B^T P e_k (\alpha_k \|e_k\| + 2\theta_{\max})$ .  $k$ 表示迭代次数,  $\varepsilon > 0$ 是一个可调参数.  $\gamma > 0$ 是学习增益,  $\hat{\theta}_k$ 表示学习控制部分,  $u_{r,k}$ 表示鲁棒控制部分,  $\text{sat}(\hat{\theta}_k^*)$ 表示对 $\hat{\theta}_k^*$ 进行限幅, 幅值为 $\theta_{\max}$ , 其定义为

$$\text{sat}(\hat{\theta}_k^*) = \begin{cases} \hat{\theta}_k^*, & |\hat{\theta}_k^*| \leq \theta_{\max} \\ \text{sgn} \hat{\theta}_k^* \theta_{\max}, & |\hat{\theta}_k^*| > \theta_{\max} \end{cases} \quad (16)$$

为收敛性证明的需要,给出如下引理<sup>[14]</sup>.

**引理1** 对于给定变量 $a, b, b_{\max}, b_{\min}$ 分别为 $b$ 的上下界,若 $b_{\min} < a < b_{\max}$ 成立,则

$$(a - \text{sat}(b))(b - \text{sat}(b)) \leq 0 \quad (17)$$

**定理2** 对于满足式(4)的系统(1),在鲁棒迭代学习控制律(12)~(15)的作用下使得闭环系统中所有变量一致有界,且当 $k \rightarrow \infty$ 时,系统的跟踪误差 $e_k$ 在 $[0, T]$ 上渐近收敛到零,即 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_k(t) = 0, t \in [0, T]$ .

**证明** 1) 有界性. 对式(9)中给定的Lyapunov函数进行求导,并将式(6)代入得

$$\begin{aligned} \dot{V}_k &= \frac{1}{2} (\dot{e}_k^T P e_k + e_k^T P \dot{e}_k) \\ &= -\frac{1}{2} e_k^T Q e_k + e_k^T P B (K e_k + \eta_k - \eta_d \\ &\quad + \eta_d + u_k - \dot{x}_{dn}) \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \|e_k\|^2 - \frac{|\mu_k|^2}{|\mu_k| + \varepsilon} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ |e_k^T P B| (\alpha_k \|e_k\| + 2\theta_{\max}) \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \|e_k\|^2 + \varepsilon \end{aligned} \quad (18)$$

由上式可知,当 $\|e_k\| \geq \sqrt{\frac{2\varepsilon}{\lambda_{Q \min}}}$ 时,  $\dot{V}_k \leq 0$ . 可以看出,  $e_k$ 一致有界. 由于 $x_d$ 是连续可导的期望轨迹,故 $x_k$ 有界. 进一步由式(12)~(15)及 $\text{sat}(\hat{\theta}_k^*)$ 的有界性可知,  $\hat{\theta}_k, u_{r,k}, u_k$ 均一致有界.

2) 收敛性. 定义如下Lyapunov-like泛函

$$L_k(t) = \frac{1}{2} e^{-\lambda t} e_k^T P e_k + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t e^{-\lambda \tau} \tilde{\theta}_k^2(\tau) d\tau \quad (19)$$

其中 $\tilde{\theta}_k(t) = \theta(t) - \hat{\theta}_k(t)$ .

对 $L_k(t)$ 进行差分得到

$$\begin{aligned} \Delta L_k &= \frac{1}{2} e^{-\lambda t} e_k^T P e_k - \frac{1}{2} e^{-\lambda t} e_{k-1}^T P e_{k-1} \\ &\quad + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t e^{-\lambda \tau} [\tilde{\theta}_k^2(\tau) - \tilde{\theta}_{k-1}^2(\tau)] d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

对式(19)右边第一项利用分部积分法得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} e^{-\lambda t} e_k^T P e_k \\ &= -\frac{1}{2} \lambda \int_0^t e^{-\lambda \tau} e_k^T(\tau) P e_k(\tau) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t e^{-\lambda \tau} [\dot{e}_k^T(\tau) P e_k(\tau) + e_k^T(\tau) P \dot{e}_k(\tau)] d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2} e_k^T(0) P e_k(0) \end{aligned} \quad (21)$$

将式(12)~(15)代入可得

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (\dot{e}_k^T P e_k + e_k^T P \dot{e}_k) \\ &= -\frac{1}{2} e_k^T Q e_k + e_k^T P B (K e_k + \eta_k - \eta_d \\ &\quad + \eta_d + u_k - \dot{x}_{dn}) \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \|e_k\|^2 + e_k^T P B (\theta - \hat{\theta}_k) \\ &\quad + |e_k^T P B| \alpha_k \|e_k\| - \frac{|\mu_k|^2}{|\mu_k| + \varepsilon} \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \|e_k\|^2 + |e_k^T P B| \alpha_k \|e_k\| \\ &\quad + e_k^T P B \tilde{\theta}_k \end{aligned} \quad (22)$$

因此

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} e^{-\lambda t} e_k^T P e_k \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \int_0^t e^{-\lambda \tau} \|e_k(\tau)\|^2 d\tau \\ &\quad - \int_0^t e^{-\lambda \tau} \left( \frac{\lambda}{2} e_k^T(\tau) P e_k(\tau) - |e_k^T P B| \alpha_k \|e_k\| \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^t e^{-\lambda \tau} e_k^T P B \tilde{\theta}_k d\tau + \frac{1}{2} e_k^T(0) P e_k(0) \end{aligned} \quad (23)$$

化简式(20)右边第三项,并结合式(13)得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma} \int_0^t e^{-\lambda\tau} [\tilde{\theta}_k^2(\tau) - \tilde{\theta}_{k-1}^2(\tau)] d\tau \\ &= \frac{1}{2\gamma} \int_0^t e^{-\lambda\tau} (\hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k) \\ & \quad \times [2(\theta - \hat{\theta}_k) + (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-1})] d\tau \\ &\leq \frac{1}{\gamma} \int_0^t e^{-\lambda\tau} (\hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k) \tilde{\theta}_k d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

根据式(23)(24)以及初始置位条件 $e_k(0) = 0$ 可得

$$\begin{aligned} \Delta L_k &\leq \int_0^t e^{-\lambda\tau} [e_k^T P B \tilde{\theta}_k + \frac{1}{\gamma} (\hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k) \tilde{\theta}_k] d\tau \\ & - \int_0^t e^{-\lambda\tau} [\frac{\lambda}{2} e_k^T(\tau) P e_k(\tau) - |e_k^T P B| \alpha_k \|e_k\|] d\tau \\ & - \frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \|e_k(\tau)\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

根据引理1可得

$$\begin{aligned} & e_k^T P B \tilde{\theta}_k + \frac{1}{\gamma} (\hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k) \tilde{\theta}_k \\ &= \frac{1}{\gamma} (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_{k-1}) \tilde{\theta}_k + \frac{1}{\gamma} (\hat{\theta}_{k-1} - \hat{\theta}_k) \tilde{\theta}_k \\ &= \frac{1}{\gamma} (\hat{\theta}_k^* - \hat{\theta}_k) \tilde{\theta}_k \\ &= \frac{1}{\gamma} (\hat{\theta}_k^* - \text{sat}(\hat{\theta}_k^*)) (\theta - \text{sat}(\hat{\theta}_k^*)) \\ &\leq 0 \end{aligned} \quad (26)$$

因此

$$\begin{aligned} \Delta L_k &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \|e_k(\tau)\|^2 d\tau \\ & - \int_0^t e^{-\lambda\tau} [\frac{\lambda}{2} e_k^T(\tau) P e_k(\tau) - |e_k^T P B| \alpha_k \|e_k\|] d\tau \end{aligned} \quad (27)$$

存在足够大的 $\lambda$ ,使得

$$\frac{\lambda}{2} e_k^T(t) P e_k(t) \geq |e_k^T P B| \alpha_k \|e_k\|$$

由式(10)可知

$$\frac{\lambda}{2} e_k^T(t) P e_k(t) \geq \frac{\lambda}{2} \lambda_{P \min} \|e_k\|^2$$

同时

$$|e_k^T P B| \alpha_k \|e_k\| \leq \|e_k^T P\| \|B\| \alpha_k \|e_k\| \leq \lambda_{P \max} \alpha_k \|e_k\|^2$$

从而存在足够大的 $\lambda$ ,使得

$$\frac{\lambda}{2} \lambda_{P \min} \|e_k\|^2 \geq \lambda_{P \max} \alpha_k \|e_k\|^2$$

即

$$\lambda \geq \frac{2\lambda_{P \max} \alpha_k}{\lambda_{P \min}}$$

则式(27)可写成

$$\Delta L_k \leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \|e_k(\tau)\|^2 d\tau \quad (28)$$

对于 $t \in [0, T]$ ,当 $k$ 取值为 $k = 1, \dots, m$ ,将 $m$ 个不等式累加可得

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \Delta L_k(t) &= L_m(t) - L_0(t) \\ &\leq -\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} e^{-\lambda T} \sum_{k=1}^m \int_0^t \|e_k\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

由式(19)可知, $L_m(t) \geq 0$ .因此

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \lambda_{Q \min} e^{-\lambda T} \sum_{k=1}^m \int_0^t \|e_k\|^2 d\tau &\leq L_0(t) - L_m(t) \\ &\leq L_0(t) \end{aligned} \quad (30)$$

当 $k = 0$ 时,

$$L_0(t) = \frac{1}{2} e^{-\lambda t} e_0^T P e_0 + \frac{1}{2\gamma} \int_0^t e^{-\lambda\tau} \tilde{\theta}_0^2(\tau) d\tau \quad (31)$$

由于 $L_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上是连续的,所以 $L_0(t)$ 在 $[0, T]$ 上有界.当 $m$ 趋于无穷大时,

$$\frac{1}{2} \lambda_{Q \min} e^{-\lambda T} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^m \int_0^t \|e_k\|^2 d\tau < \infty \quad (32)$$

由级数收敛性质知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^t \|e_k\|^2 d\tau = 0 \quad (33)$$

进一步地,因为 $\dot{e}_k$ 一致有界,利用类Barbalat引理<sup>[14]</sup>可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| = 0 \quad (34)$$

至此定理得证. ■

## 5 数值仿真(Numerical Simulation)

考虑如下某电机控制系统模型

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -ax_2 + bu + \eta(x, t) \\ y = x_1 \end{cases} \quad (35)$$

其中, $a = 100$ , $b = 24000$ , $x_1$ 为电机转角(deg), $x_2$ 为电机转速(deg/s), $u$ 为该系系统速度环输入信号(V),取不确定特性为 $\eta(x, t) = 0.1x_1 \sin x_2 \sin t$ .根据式(3)选取界函数 $\rho(x, t) = 0.1|x_1|$ , $\alpha(x, x_d, t) = 0.1 + 0.1|x_1|$ .期望轨迹选为

$$y_d(t) = \begin{cases} 15(10t^3 - 15t^4 + 6t^5), & 0 \leq t < 1 \\ 15, & 1 \leq t < 1.5 \\ 15(10(2.5 - t)^3 - 15(2.5 - t)^4 + 6(2.5 - t)^5), & 1.5 \leq t < 2.5 \end{cases}$$

周期 $T = 2.5$ , 由上式可知系统初态 $x(0) = [0 \ 0]^T$ . 分别采用鲁棒控制律(7) (8) 和鲁棒迭代学习控制律(12) ~ (15) 进行仿真. 选取如下 $A_K, K, P, Q$

$$A_K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}, K = \begin{pmatrix} 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 2.1875 & 0.25 \\ 0.25 & 0.0937 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以及饱和函数限幅值 $\theta_{\max} = 7$ . 记鲁棒迭代学习控制的性能指标为

$$J_{i,k} = \max_{t \in [0, T]} |e_i(t)|, i = 1, 2$$

其中,  $k$ 代表迭代次数. 图1, 2 为传统鲁棒控制的仿真结果, 其中 $\varepsilon = 0.6$ . 结果表明, 传统鲁棒控制只能实现跟踪误差收敛到原点的邻域内, 跟踪误差范围大致为 $[-0.15, 0.2]$ .

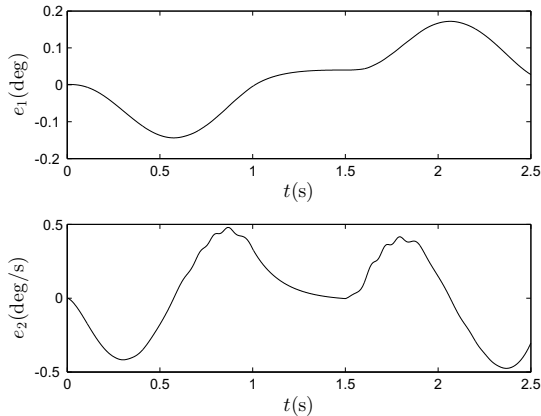


图 1: 位置误差 $e_1$ 和速度误差 $e_2$ (采用控制器(7))

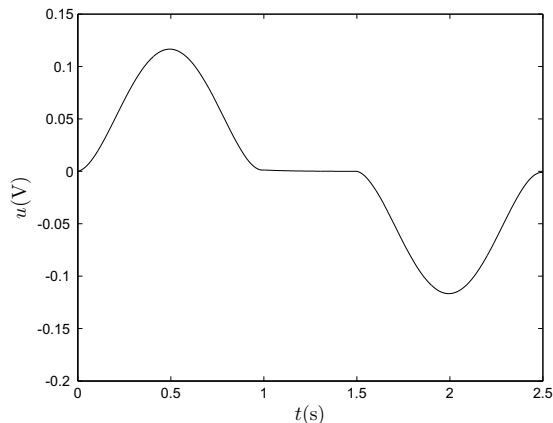


图 2: 控制输入 $u$ (采用控制器(7))

鲁棒迭代学习控制的仿真结果如图3 ~ 6, 其中 $\varepsilon = 0.6, \gamma = 15$ . 图5表明系统第100次迭代时的不确定特性的参数估计 $\hat{\theta}$ 一直在限幅内. 在第100次迭代时, 系统的跟踪误差小于 $12 \times 10^{-4}$ . 结果表明, 当 $\varepsilon$ 取值相同时, 随着迭代次数的增加, 鲁棒迭代学习控制可实现系统期望轨迹的完全跟踪.

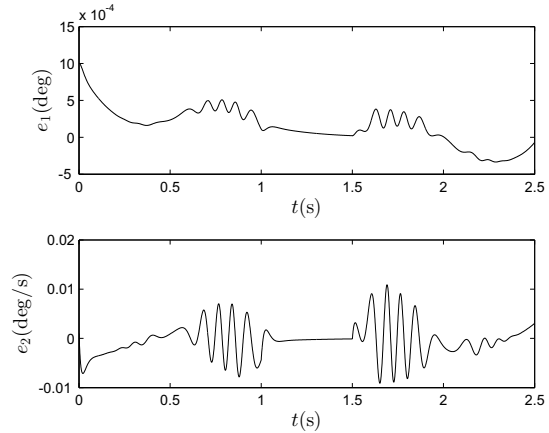


图 3:  $k = 100$ 时的位置误差 $e_1$ 和速度误差 $e_2$ (采用控制器(12))

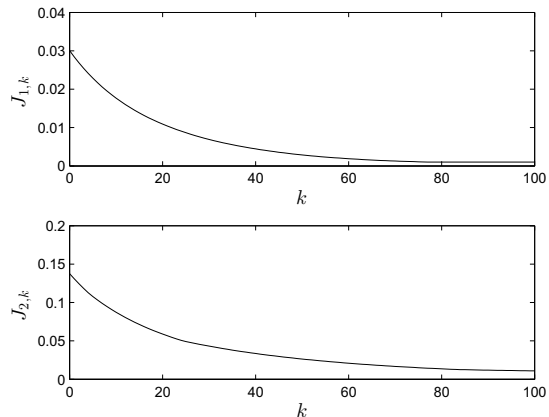


图 4:  $J_{1,k}$ 和 $J_{2,k}$ 轨迹(采用控制器(12))

## 6 结论(Conclusion)

本文讨论一类不确定系统的鲁棒迭代学习控制问题. 在系统不确实性界函数已知的情况下, 按照传统鲁棒控制方法进行设计, 继而增加学习控制成分, 形成鲁棒迭代学习控制器, 不确定特性的估计采用了完全限幅的学习方案. 理论分析和仿真结果表明, 鲁棒迭代学习控制器可以改善传统鲁棒控制的控制效果, 使得系统的跟踪误差收敛到零.

## 参考文献

- [1] Corless M J, Leitmann G. Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic



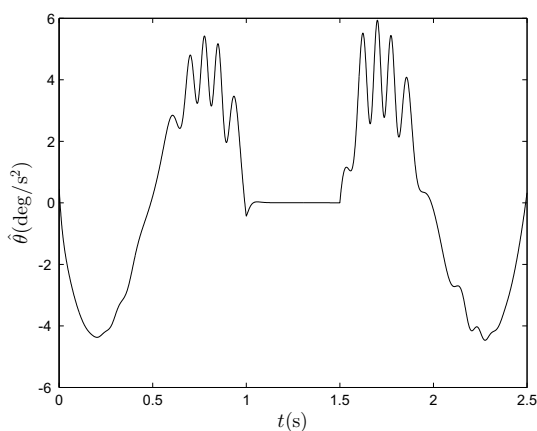


图 5:  $k = 100$ 时的参数估计 $\hat{\theta}$  (采用控制器(12))

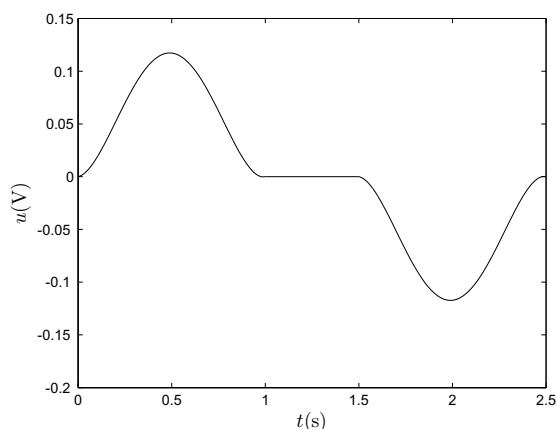


图 6:  $k = 100$ 时的控制输入 $u$ (采用控制器(12))

systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1981, 26(5):1139-1144.

- [2] Chen Y H, Leitmann G. Robustness of uncertain systems in absence of matching assumptions [J]. International Journal of Control, 1987, 45(5): 1527-1542.
- [3] Qu Z H. Global stabilization of nonlinear systems with a class of unmatched uncertainties [J]. Systems and Control Letters, 1992, 18(3): 301-307.
- [4] Arimoto S. Learning control theory for robotic motion[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 1990, 4(6):543-564.
- [5] Qu Z H, Xu J. Asymptotic learning control for a class of cascaded nonlinear uncertain systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2002, 47(8): 1369-1376.
- [6] Tayebi A. Adaptive iterative learning control for robot manipulators[J]. Automatica, 2004, 40(7):1195-1203.
- [7] Chien C J, Hsu C T, Yao C Y. Fuzzy system-based adaptive iterative learning control for nonlinear plants with initial state errors[J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2004, 12(5): 724-732.
- [8] Qu Z H, Zhuang H. Non-linear learning control of robot manipulators without requiring acceleration measurement[J]. International Journal of Adaptive Control and Signal Processing, 2007, 7(2):77-90.
- [9] Xu J X, Cao W J. Learning variable structure control approaches for repeatable tracking tasks[J]. Automatica, 2001, 37(7): 997-1006.
- [10] Xu J X, Xu J, Tan Y. Robust learning control for nonlinear uncertain systems based on composite energy function [C]. 15th Triennial World Congress of the International Federation of Automatic Control, Barcelona, Spain: 2002.
- [11] Kuc T, Nam K, Lee J. An iterative learning control of robot manipulators[J]. IEEE Journal on Robotics and Automation, 1990, 7(6): 835-841.
- [12] Marino R, Tomei P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(8): 1991-1996.
- [13] Sun M X, Ge S S. Adaptive Repetitive Control for a Class of Nonlinearly Parametrized Systems[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(10):1684-1688.
- [14] Sun M X. A Barbalat-like lemma with its application to learning control[J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2009, 54(9): 2222-2225.