

# 基于部分状态信息反馈的重复学习控制方法

严求真<sup>1</sup>, 朱胜<sup>2</sup>, 蔡建平<sup>3</sup>

1. 浙江水利水电学院信息工程学院, 杭州 310018, 中国
  2. 浙江大学城市学院信息与电气工程学院, 杭州 310015, 中国
  3. 浙江水利水电学院应用数学研究所, 杭州 310018, 中国
- E-mail: zjyqz@126.com

**摘要:** 针对一类部分状态信息可量测的非参数不确定系统, 提出一套重复学习控制算法, 用于解决该类系统的输出跟踪问题. 在坐标变换的基础上, 利用Lyapunov方法设计基于可量测的部分状态向量元素所反馈的重复学习控制器. 该控制器利用鲁棒学习方法补偿满足类Lipschitz条件的非参数不确定性. 应用本文给出的控制律, 闭环系统可在足够多周期的重复学习运行后, 实现系统输出在整个学习周期上对期望轨迹的完全跟踪, 从而获得较好的控制性能, 并确保闭环系统所有信号有界. 数值仿真证实了所提出控制方法的有效性.

**关键词:** 部分状态反馈, 重复学习控制, 非参数不确定系统, 坐标变换

## Repetitive learning control for partial-state feedback systems

Yan Qiuzhen<sup>1</sup>, Zhu Sheng<sup>2</sup>, Cai Jianping<sup>3</sup>

1. College of Information Engineering, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou 310018, China
  2. School of Information and Electrical Engineering, Zhejiang University City College, Hangzhou 310015, China
  3. Institute of Applied Mathematics, Zhejiang University of Water Resources and Electric Power, Hangzhou 310018, China
- E-mail: zjyqz@126.com

**Abstract:** To tackle the tracking problem for a class of non-parametric uncertain systems in which only partial elements of the state vector can be measured, this paper presents a repetitive learning control method to compensate for non-parametric uncertainties with a robust learning algorithm. A series of coordinate transformations give rise to a new state-space representation of the original system equation. The Lipschitz-like continuous conditions are used to handle uncertainties. The learning controller is designed on the basis of those measurable partial elements of the state vector through a Lyapunov approach. With the control law in application, as cycles increase, the system output can perfectly track the desired trajectory over the full period, thus achieving excellent control performances and guaranteeing bounded system variables. Numerical results are presented to demonstrate the effectiveness of the learning control scheme.

**Key Words:** Partial-state feedback, repetitive learning control, non-parametric system, coordinate transformation

### 1 引言

在许多实际系统中, 系统状态向量中的部分元素不可量测, 无法采用全部系统状态信息设计控制器, 此时, 我们不得不考虑根据可量测的部分状态信息来设计控制系统. 基于部分状态信息设计控制器的已有方法大致可分为三类: 一是分解含未知状态信息的不确定性, 并结合鲁棒方法予以补偿<sup>[1]-[4]</sup>; 二是采用滤波方法估计未知状态<sup>[5]-[6]</sup>; 三是根据已知的部分状态信息构造模糊系统, 采用模糊控制方法设计控制器<sup>[7]</sup>. 文献[1][2]利用界函数设计补偿项, 而[3][4]没有使用界函数. 文献[3]的第3节讨论部分状态信息反馈的学习控制方法, 结合坐标变换与反演方法设计重复学习控制器. 应该指出, 输出反馈可视为一种特殊的部分状态反馈, 但输出反馈控制系统在设计方法方面有别于一般性的部分状态信息反馈控制系统.

学习控制方法问世于上世纪80年代初, 至今一直属控制领域的研究热点<sup>[8][9][10]</sup>. 迭代学习控制与重复控制是学习控制的两个分支, 迭代学习控制方法适用于在有限时间区间重复运行的作业对象, 在每次迭代运

行前需要进行复位操作; 重复控制方法适用于无线作业区间上的重复运行对象, 常用于跟踪周期性参考轨迹或抑制周期性扰动<sup>[29]</sup>. 两者在运行机理上存在相似性, 它们均利用前次或前几次运行期间的系统信息修正待学习量. Lyapunov综合方法是当前学习控制领域的重要研究课题之一<sup>[11][12]</sup>, 讨论线性参数不确定系统的文献众多<sup>[13][14][15]</sup>, 而考虑非参数不确定系统的结果较少. 非参数不确定性在假设方面的要求低于参数不确定性, 适用范围更广, 但其处理难度也大于参数不确定性. 文献[17]利用界函数设计反馈项补偿非参数不确定性. 文献[18][19]采用鲁棒学习方法处理非参数不确定性, 文献[20]则采用傅立叶级数逼近不确定性. 文献[21]针对控制增益时变的非参数不确定系统, 基于反演方法设计迭代学习控制系统. 文献[22]针对一类同含参数不确定性和非参数不确定性的非线性系统, 分别提出准最优迭代学习控制算法和准最优重复学习控制算法. 为了增强系统的鲁棒性及系统运行中的安全性, 可以采用状态受限学习控制方法设计控制器, 相关的结果见[23]-[26]. 近年来, 兼具迭代学习控制与重复控制特点的重复学习控制方法引起了人们的注意<sup>[27][28][23]</sup>, 该方法适用于参考轨迹闭合场合, 勿需象迭代学习控

国家自然科学基金(61174034, 61573320, 61573322)资助

制方法那样,在每次运行前进行精确复位,也就是说,采用重复学习控制方法设计控制系统,可被视作克服迭代学习控制的初值问题的一种解决方案。

本文针对部分状态可量测的一类非参数不确定系统,利用Lyapunov方法设计重复学习控制器,在坐标变换的基础上,根据类Lipschitz连续条件处理非参数不确定性。经过足够多周期的重复学习后,可实现系统输出对期望轨迹在整个作业区间上的完全跟踪,并确保闭环系统所有变量有界。本文讨论的系统较文献[3]第3节考虑的系统更具一般性,所给出的解决方案也较该文给出的反演控制设计方法简便。

## 2 问题的提出

考虑一类在时间 $[0, T]$ 上连续重复运行的部分状态可量测非参数不确定系统:

$$\begin{cases} \dot{x}_{1k} = x_{2k}, \\ \dot{x}_{2k} = x_{3k}, \\ \dots = \dots, \\ \dot{x}_{m-1k} = x_{mk}, \\ \dot{x}_{mk} = x_{m+1k} + b_1\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + b_1g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k, \\ \dot{x}_{m+1k} = x_{m+2k} + b_2\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + b_2g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k, \\ \dots = \dots, \\ \dot{x}_{n-1k} = x_{nk} + b_{n-m}\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + b_{n-m}g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k, \\ \dot{x}_{nk} = b_{n-m+1}\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + b_{n-m+1}g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k, \\ y_k = h_0(\mathbf{x}_{ak}). \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $k (= 0, 1, 2, \dots)$  为重复作业次数,  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbf{x}_k = [x_{1k}, \dots, x_{mk}, \dots, x_{nk}]^T \in R^n$ ,  $\mathbf{x}_k$  中的前  $m$  个元素可量测, 后  $n - m + 1$  个元素不可量测,  $\phi(\cdot, \cdot) \in R$ ,  $g(\cdot, \cdot) \in R$  为未知的光滑函数, 分别满足假设1和假设2,  $y_k \in R$  与  $u_k \in R$  分别为系统的输出与控制量。  $b_1 > 0$ ,  $b_i (i = 2, \dots, n - m + 1)$  为Hurwitz多项式  $p(s) = s^{n-m} + b_{n-m+1}s^{n-m-1} + \dots + b_3s + b_2$  的系数。 本文考虑系统状态首尾光滑相接情形,  $\mathbf{x}_k(T) = \mathbf{x}_{k+1}(0)$ 。

记  $\mathbf{x}_{ak} = [x_{1k}, \dots, x_{mk}]^T$ , 将上述系统写成向量形式,

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k = A\mathbf{x}_k + \mathbf{b}(\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k), \\ y_k = h_0(\mathbf{x}_{ak}). \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_{n-m+1} \end{pmatrix}.$$

控制目标是设计重复学习控制器  $u_k$ , 使得系统经过多次迭代后, 实现系统输出  $y_k$  在  $[0, T]$  上对其期望轨迹  $y_d$  的完全跟踪, 并保证所有闭环信号有界。  $y_d$  为光滑

闭合,  $y_d(0) = y_d(T)$ , 由周期系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_d = A\mathbf{x}_d + \mathbf{b}\phi(\mathbf{x}_{ad}, t) + \mathbf{b}g(\mathbf{x}_{ad}, t)u_d \\ y_d = h_0(\mathbf{x}_{ad}) \end{cases} \quad (3)$$

所确定, 式中,  $\mathbf{x}_d = [x_{1d}, x_{2d}, \dots, x_{nd}]^T$ 。

本文中, 系统(1)满足下列假设:

**假设 1.** 存在已知连续函数  $g_m(\mathbf{x}_{ak}, t)$ , 满足  $0 < g_m(\mathbf{x}_{ak}, t) \leq g(\mathbf{x}_{ak}, t)$ 。

**假设 2.** 函数  $f(\cdot, \cdot)$  与  $g(\cdot, \cdot)$  满足下述条件: 对于任意  $\xi_1 \in R^m$ ,  $\xi_2 \in R^m$ ,

$$|\phi(\xi_1, t) - \phi(\xi_2, t)| \leq \alpha_\phi(\xi_1, \xi_2, t) \|\xi_1 - \xi_2\|$$

与

$$|g(\xi_1, t) - g(\xi_2, t)| \leq \alpha_g(\xi_1, \xi_2, t) \|\xi_1 - \xi_2\|$$

成立。其中,  $\alpha_\phi(\cdot, \cdot, t)$ ,  $\alpha_g(\cdot, \cdot, t)$  为非负连续函数。

为了叙述简便, 在不引起歧义时, 记  $\phi(\mathbf{x}_{ak}, t)$ ,  $g(\mathbf{x}_{ak}, t)$  和  $g_m(\mathbf{x}_{ak}, t)$  分别为  $\phi_{ak}$ ,  $g_k$  和  $g_{mk}$ , 文中函数自变量  $t$  及积分变量  $\tau$  常略去。

**注 1.** 文献[3]的第3节讨论系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k = A\mathbf{x}_k + \mathbf{b}(\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + \frac{1}{\nu}u_k) \\ y_k = h_0(\mathbf{x}_k) \end{cases} \quad (4)$$

的学习控制方法, 其中  $\nu$  为一常数, 本文所讨论的系统更具一般性。

## 3 控制器设计

不失一般性, 设  $b_1=1$ 。对系统(1)作坐标变换

$$\begin{cases} z_{ik} = x_{ik}, \quad 1 \leq i \leq m \\ \eta_{ik} = x_{m+ik} - b_{i+1}x_{mk} \quad 1 \leq i \leq n - m \end{cases} \quad (5)$$

可得周期系统

$$\begin{cases} \dot{z}_{ik} = z_{i+1k}, \quad 1 \leq i \leq m - 1 \\ \dot{z}_{mk} = \eta_{1k} + b_2z_{mk} + \phi_{ak} + g_k u_k, \\ \dot{\eta}_k = \Gamma \eta_k + \bar{\mathbf{b}} z_{mk}, \end{cases} \quad (6)$$

其中,

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -b_2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -b_3 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ -b_{n-m} & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -b_{n-m+1} & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} b_3 - b_2^2 \\ b_4 - b_3b_2 \\ \vdots \\ b_{n-m+1} - b_{n-m}b_2 \\ -b_{n-m+1}b_2 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

不难看出, 存在正定对称矩阵  $P_2$  与  $Q_2$ , 满足

$$P_2\Gamma + \Gamma^T P_2 = -Q_2. \quad (9)$$

对系统(3)作坐标变换

$$\begin{aligned} z_{id} &= x_{id}, \quad 1 \leq i \leq m \\ \eta_{id} &= x_{m+i} - b_{i+1}x_{md}, \quad 1 \leq i \leq n-m \end{aligned} \quad (10)$$

可得

$$\begin{cases} \dot{z}_{id} = z_{i+1d}, & 0 \leq i \leq m-1 \\ \dot{z}_{md} = \eta_{1d} + b_2 z_{md} + \phi_{ad} + g_d u_d \\ \dot{\eta}_d = \Gamma \eta_d + \bar{\mathbf{b}} z_{md}. \end{cases} \quad (11)$$

记  $\tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{z}_k - \mathbf{z}_d, \tilde{\eta}_k = \eta_k - \eta_d$ . 由式(6)与(11)可得,

$$\begin{cases} \dot{\tilde{z}}_{ik} = \tilde{z}_{i+1k}, & 1 \leq i \leq m-1 \\ \dot{\tilde{z}}_{mk} = \tilde{\eta}_{1k} + b_2 \tilde{z}_{mk} + \phi_{ak} - \phi_{ad} + g_k u_k - g_d u_d, \\ \dot{\tilde{\eta}}_k = \Gamma \tilde{\eta}_k + \bar{\mathbf{b}} \tilde{z}_{mk}, \end{cases} \quad (12)$$

写成向量形式为

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{z}}}_k = A_z \tilde{\mathbf{z}}_k + \mathbf{b}_z (\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{z}}_k + \tilde{\eta}_{1k} + b_2 \tilde{z}_{mk} \\ \quad + \phi_{ak} - \phi_{ad} + g_k u_k - g_d u_d), \\ \dot{\tilde{\eta}}_k = \Gamma \tilde{\eta}_k + \bar{\mathbf{b}} \tilde{z}_{mk}, \end{cases} \quad (13)$$

上式中,

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$c_i (i = 1, 2, \dots, m)$  为Hurwitz多项式  $h(s) = s^m + c_m s^{m-1} + \dots + c_2 s + c_1$  的系数,  $\mathbf{c} = (0, c_1, c_2, \dots, c_m)^T$ . 存在适当维数的正定对称矩阵  $P_1, Q_1$ , 满足  $P_1 A_z + A_z^T P_1 = -Q_1$ . 我们为(1)设计如下控制律和学习律:

$$u_k = u_{dk} - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{g_m} \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z \quad (14)$$

$$\begin{aligned} u_{dk} &= \text{sat}(u_{dk}^*) \\ u_{dk}^* &= \text{sat}(u_{dk-1}^*) - \gamma_3 \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z \end{aligned} \quad (15)$$

$\gamma_1$  的定义见式(23),  $\gamma_2 > 0, \gamma_3 > 0$ . 对  $\text{sat}(\cdot)$  定义为: 对于  $\vartheta \in R$ ,

$$\text{sat}(\vartheta) \triangleq \begin{cases} \vartheta, & |\vartheta| < \bar{\vartheta} \\ \bar{\vartheta} \text{sgn}(\vartheta), & |\vartheta| \geq \bar{\vartheta}. \end{cases} \quad (16)$$

#### 4 收敛性分析

将控制律(14)施加于系统(1)后, 闭环系统具有如定理1所述的性质.

**定理 1.** 满足假设1-3时, 在由系统(1)和控制律(14)及学习律(15)组成的闭环系统中, 经过足够多周期的重复作业后, 系统输出  $y_k$  在整个作业区间  $[0, T]$  完全跟踪  $y_d$ , 即  $\lim_{k \rightarrow \infty} e_{y_k}(t) = y_k(t) - y_d(t) = 0, \forall t \in [0, T]$ , 并保证闭环系统中的所有信号有界.

**证明**

选取第  $k$  次迭代时的Lyapunov泛函

$$L_k = V_k + \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^t g_d (u_{dk} - u_d)^2 d\tau, \quad (17)$$

式中  $V_k = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \tilde{\mathbf{z}}_k + \frac{1}{2} \tilde{\eta}_k^T P_2 \tilde{\eta}_k$ . 由(13)可以推出

$$\begin{aligned} V_k &= V_k(0) - \frac{1}{2} \int_0^t (\tilde{\mathbf{z}}_k^T Q_1 \tilde{\mathbf{z}}_k + \tilde{\eta}_k^T Q_2 \tilde{\eta}_k) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{z}}_k + \tilde{\eta}_{1k} + b_2 \tilde{z}_{mk} + \phi_{ak} - \phi_{ad} \\ &\quad + g_k u_k - g_d u_d) d\tau + \int_0^t \tilde{\eta}_k^T P_2 \bar{\mathbf{b}} \tilde{z}_{mk} d\tau \end{aligned} \quad (18)$$

由于

$$\begin{aligned} &\int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (\mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{z}}_k + \phi_{ak} - \phi_{ad}) d\tau \\ &\leq \int_0^t |\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z| (\alpha_{\phi k} + \|\mathbf{c}\|) \|\tilde{\mathbf{z}}_k\| d\tau \\ &\leq \frac{\mu_1}{2} \int_0^t \|\tilde{\mathbf{z}}_k\|^2 d\tau \\ &\quad + \frac{1}{2\mu_1} \int_0^t (\alpha_{\phi k} + \|\mathbf{c}\|)^2 (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} &\int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (g_k u_k - g_d u_d) d\tau \\ &= \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (g_k u_k - g_k u_{dk} + g_k u_{dk} - g_d u_{dk} \\ &\quad + g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau \\ &\leq \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (g_k u_k - g_k u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau \\ &\quad + \frac{\mu_2}{2} \int_0^t \|\tilde{\mathbf{z}}_k\|^2 d\tau + \frac{1}{2\mu_2} \int_0^t (\alpha_{gk} u_{dk} \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau, \end{aligned}$$

均成立, 且

$$\begin{aligned} &\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (\tilde{\eta}_{1k} + b_2 \tilde{z}_{mk}) \\ &\leq \left( \frac{1}{2\mu_3} + \frac{1}{2\mu_4} \right) (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 + \frac{1}{2} \mu_3 \tilde{\eta}_{1k}^2 + \frac{1}{2} \mu_4 b_2^2 \tilde{z}_{mk}^2, \end{aligned}$$

故将以上三式的结果应用于(18), 有

$$\begin{aligned} &V_k \\ &\leq V_k(0) - \frac{1}{2} \int_0^t (\tilde{\mathbf{z}}_k^T Q_1 \tilde{\mathbf{z}}_k + \tilde{\eta}_k^T Q_2 \tilde{\eta}_k) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left[ \frac{1}{2\mu_1} (\alpha_{\phi k} + \|\mathbf{c}\|)^2 + \frac{1}{2\mu_2} (\alpha_{gk} u_{dk})^2 \right] (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left( \frac{1}{2\mu_3} + \frac{1}{2\mu_4} \right) (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau \\ &\quad + \int_0^t \left( \frac{1}{2} \mu_3 \tilde{\eta}_{1k}^2 + \frac{1}{2} \mu_4 b_2^2 \tilde{z}_{mk}^2 \right) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (g_k u_k - g_k u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau \\ &\quad + \int_0^t \tilde{\eta}_k^T P_2 \bar{\mathbf{b}} \tilde{z}_{mk} d\tau + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2} \int_0^t \|\tilde{\mathbf{z}}_k\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (19)$$

此处,  $\mu_3 > 0$ 、 $\mu_4 > 0$  为设计参数. 注意到

$$\begin{aligned} & \int_0^t \tilde{\eta}_k^T P_2 \bar{\mathbf{b}} \tilde{z}_{mk} d\tau + \int_0^t \frac{1}{2} \mu_4 b_2^2 \tilde{z}_{mk}^2 d\tau \\ & \leq \frac{1}{2\mu_5} \int_0^t \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau + \int_0^t \left( \frac{1}{2} \mu_5 \|P_2 \bar{\mathbf{b}}\| + \frac{1}{2} \mu_4 b_2^2 \right) \tilde{z}_{mk}^2 d\tau \\ & \leq \frac{1}{2\mu_5} \int_0^t \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau + \left( \frac{1}{2} \mu_5 \|P_2 \bar{\mathbf{b}}\| + \frac{1}{2} \mu_4 b_2^2 \right) \int_0^t \|\tilde{\mathbf{z}}_k\|^2 d\tau \end{aligned}$$

将上式代入(19),

$$\begin{aligned} & V_k \\ & \leq V_k(0) - \frac{1}{2} \int_0^t (\tilde{\mathbf{z}}_k^T Q_1 \tilde{\mathbf{z}}_k + \tilde{\eta}_k^T Q_2 \tilde{\eta}_k) d\tau \\ & \quad + \int_0^t \left[ \frac{1}{2\mu_1} (\alpha_{\phi k} + \|\mathbf{c}\|)^2 + \frac{1}{2\mu_2} (\alpha_{gk} u_{dk})^2 + \frac{1}{2\mu_3} \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2\mu_4} \right] (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau \\ & \quad + \int_0^t \frac{1}{2} \mu_3 \tilde{\eta}_k^2 d\tau + \frac{1}{2\mu_5} \int_0^t \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau \\ & \quad + \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (g_k u_k - g_k u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau \\ & \quad + \left( \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2} + \frac{1}{2} \mu_5 \|P_2 \bar{\mathbf{b}}\| + \frac{1}{2} \mu_4 b_2^2 \right) \int_0^t \|\tilde{\mathbf{z}}_k\|^2 d\tau \end{aligned} \quad (20)$$

选择合适的  $P_1$ 、 $P_2$ 、 $\mu_1$ 、 $\mu_2$ 、 $\mu_3$ 、 $\mu_4$  和  $\mu_5$ , 可使

$$\lambda_{q1} \geq \frac{\mu_1}{2} + \frac{\mu_2}{2} + \frac{1}{2} \mu_5 \|P_2 \bar{\mathbf{b}}\| + \frac{1}{2} \mu_4 b_2^2 \quad (21)$$

与

$$\lambda_{q2} > \frac{\mu_3}{2} + \frac{1}{2\mu_5}. \quad (22)$$

同时成立, 式中,  $\lambda_{q1}$  与  $\lambda_{q2}$  分别表示  $Q_1$  与  $Q_2$  的最小特征值. 记

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2\mu_1} (\alpha_{\phi k} + \|\mathbf{c}\|)^2 \\ & \quad + \frac{1}{2\mu_2} (\alpha_{gk} u_{dk})^2 + \frac{1}{2\mu_3} + \frac{1}{2\mu_4}, \end{aligned} \quad (23)$$

于是由(20)可得

$$\begin{aligned} V_k & \leq V_k(0) + \int_0^t \gamma_1 (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau - \frac{\mu_6}{2} \int_0^t \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau \\ & \quad + \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (g_k u_k - g_k u_{dk} + g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau \end{aligned}$$

式中,  $\mu_6 = \lambda_{q2} - \frac{\mu_3}{2} + \frac{1}{2\mu_5}$ . 将(14) 代入上式, 即有

$$\begin{aligned} V_k & \leq V_k(0) - \int_0^t \gamma_2 (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau - \frac{\mu_6}{2} \int_0^t \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau \\ & \quad + \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (g_d u_{dk} - g_d u_d) d\tau \end{aligned} \quad (24)$$

结合(24)与(17), 当  $k > 0$  时,

$$\begin{aligned} & L_k - L_{k-1} \\ & \leq V_k(0) - V_{k-1} - \int_0^t \gamma_2 (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau \\ & \quad - \frac{\mu_6}{2} \int_0^t \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau + \int_0^t \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z g_d (u_{dk} - u_d) d\tau \\ & \quad + \frac{1}{2\gamma_3} \int_0^t g_d [(u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2] d\tau \end{aligned} \quad (25)$$

由(15)可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\gamma_3} [(u_{dk} - u_d)^2 - (u_{dk-1} - u_d)^2] \\ & \quad + \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z (u_{dk} - u_d) \\ & \leq \frac{1}{\gamma_3} (u_d - u_{dk}) (-u_{dk} + u_{dk-1} - \gamma_3 \tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z) \\ & = \frac{1}{\gamma_3} (u_d - \text{sat}(u_{dk}^*)) (u_{dk}^* - \text{sat}(u_{dk}^*)) \\ & \leq 0. \end{aligned} \quad (26)$$

将(26)代入(25), 即有

$$\begin{aligned} L_k - L_{k-1} & \leq V_k(0) - V_{k-1} - \int_0^t \gamma_2 (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau \\ & \quad - \frac{\mu_6}{2} \int_0^t \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau \end{aligned} \quad (27)$$

利用系统状态和参考信号的首尾相接条件, 有

$$\begin{aligned} & L_k(T) - L_{k-1}(T) \\ & \leq - \int_0^T \gamma_2 (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau - \frac{\mu_6}{2} \int_0^T \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau \end{aligned} \quad (28)$$

由此可知

$$\begin{aligned} L_k(T) & \leq L_0(T) - \sum_{j=1}^k \int_0^T \gamma_2 (\tilde{\mathbf{z}}_j^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau \\ & \quad - \frac{\mu_6}{2} \sum_{j=1}^k \int_0^T \tilde{\eta}_j^T \tilde{\eta}_j d\tau \end{aligned} \quad (29)$$

根据  $L_0(t)$  的连续性, 知  $L_0(T)$  是有界的, 结合由  $L_k(T)$  的非负性, 知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T (\tilde{\mathbf{z}}_k^T P_1 \mathbf{b}_z)^2 d\tau = 0$  及  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_0^T \tilde{\eta}_k^T \tilde{\eta}_k d\tau = 0$ . 由饱和函数的性质可知  $\|\tilde{\mathbf{z}}_k\| < +\infty$ ,  $\tilde{\mathbf{z}}_k$  满足等度连续条件, 于是有

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\mathbf{z}}_k = \mathbf{0}. \quad (30)$$

进一步地, 易知  $\lim_{k \rightarrow +\infty} e_{yk}(t) = 0, t \in [0, T]$ .

同时, 当  $k \rightarrow +\infty$  时,

$$\dot{\tilde{\eta}}_k = \Gamma \tilde{\eta}_k \quad (31)$$

根据矩阵  $\Gamma$  的性质可知,  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \tilde{\eta}_k(t) = \mathbf{0}$ .

根据上述分析及饱和函数的性质, 容易看出在重复学习过程中, 各系统信号是有界的.  $\square$

本文在坐标变换的基础上根据类Lipschitz 条件处理非参数不确定性. 经过足够多周期的重复学习后, 系统输出可以在整个学习周期上零误差跟踪期望轨迹. 本文讨论的系统较文献[3]中所讨论的系统一般; 同时, 本文的设计方法也较该文献中的解决方案简便.

## 5 仿真算例

考虑如下在 $[0, T]$ 上重复运行的周期系统

$$\begin{cases} \dot{x}_{1k} = x_{2k}, \\ \dot{x}_{2k} = x_{3k} + b_1\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + b_1g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k, \\ \dot{x}_{3k} = x_{4k} + b_2\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + b_2g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k, \\ \dot{x}_{4k} = b_3\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) + b_3g(\mathbf{x}_{ak}, t)u_k, \\ y_k = x_{1k}. \end{cases} \quad (32)$$

式中,  $t \in [0, T]$ ,  $b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 2$ ,  $\mathbf{x}_{ak} = [x_{1k}, x_{2k}]$ 为可量测的系统状态信息,  $x_{3k}$ 与 $x_{4k}$ 不可量测,  $\phi(\mathbf{x}_{ak}, t) = -0.1x_{2k} - x_{1k}^3 + \cos(t)$ ,  $g(\mathbf{x}_{ak}, t) = 1 + 0.01x_{1k}^2 + 0.005x_{2k}^2$ ,  $\phi(\mathbf{x}_{ak}, t)$ 和 $g(\mathbf{x}_{ak}, t)$ 被视为不确定性.  $x_{10}(0) = 1.5, x_{20}(0) = 2, x_{30}(0) = 1, x_{40}(0) = 0$ . 控制目标是设计合适的控制律, 经过足够多周期的学习后, 实现 $y_k = x_{1k}$ 对 $y_d = x_{1d} = \cos(2\pi t)$ 的完全轨迹跟踪. 取 $g_m(\mathbf{x}_{ak}, t) = 1, \alpha_{fk} = 0.1 + |x_{1d}^2 + x_{1k}^2 + x_{1d}x_{1k}|, \alpha_{gk} = 0.01|x_{1d} + x_{1k}| + 0.005|x_{2d} + x_{2k}|$ . 应用拉格朗日中值定理, 容易检验系统满足假设1和假设2. 取

$$A_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, P_1 = \begin{pmatrix} 75 & 25 \\ 25 & 25 \end{pmatrix},$$

及

$$P_2 = \begin{pmatrix} 7.5 & -2.5 \\ -2.5 & 5 \end{pmatrix},$$

采用控制律(14)进行仿真, 选取仿真参数 $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 1$ , 系统重复运行80次后, 仿真结果如图1-图4所示. 从图1和图2可以看出, 经过80次的重复学习后,  $y_k$ 能够在整个作业区间完全跟踪 $y_d$ . 图3是第80周期的控制输入情况. 图4是 $J_k$ 随时间变化情况,  $J_k \triangleq \max_{\tau \in [0, T]} (\mathbf{e}_{ak}^T P_1 \mathbf{e}_{ak}), \mathbf{e}_{ak} = \mathbf{x}_{ak} - [y_d, \dot{y}_d]^T$ .

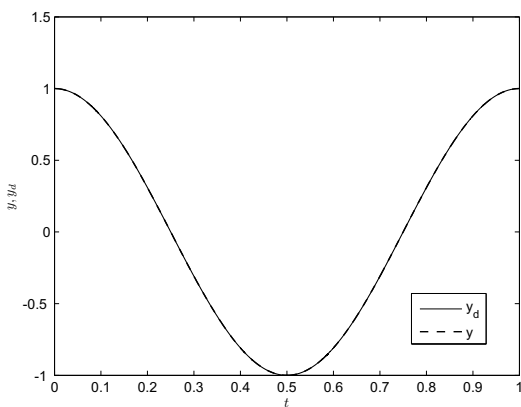


图1  $y_k$ 及其参考轨迹 $y_d$

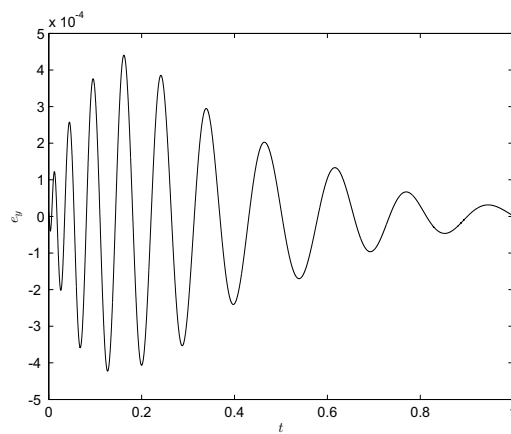


图2 输出误差 $e_y$

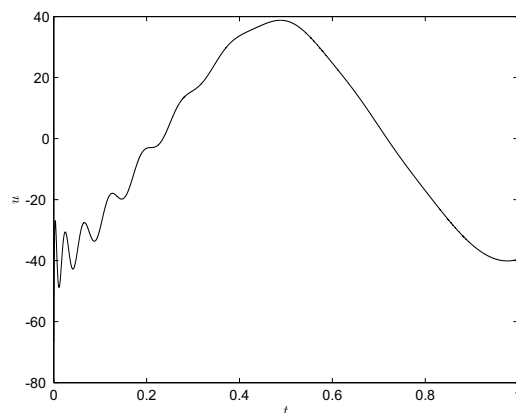


图3 控制输入

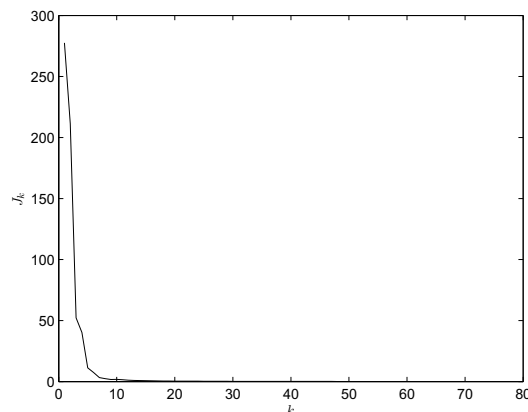


图4  $J_k$ 随时间的变化

本例表明, 利用本文提出的参考信号初始修正鲁棒学习控制设计方法, 可以解决含输入死区非参数不确定系统的初值问题, 实现初态误差非零情形下的部分作业区间精确跟踪.

## 6 结论

本文研究基于部分状态信息反馈的重复学习控制算法, 利用坐标转换方法, 将原系统状态方程转换为外部动态方程与内部动态方程的组合. 根据类Lipschitz连



续条件处理非参数不确定性, 利用Lyapunov方法设计重复学习控制器. 经过足够多周期的重复学习后, 可实现系统输出对期望轨迹在整个作业周期上的完全跟踪, 并确保闭环系统所有变量有界. 理论分析和仿真结果都表明本文给出的方法是行之有效的.

## 参考文献

- [1] Bechlioulis C P, Rovithakis G A. Robust partial-state feedback prescribed performance control of cascade systems with unknown nonlinearities. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2011, 56(9): 2224–2230
- [2] Wei L, Pongvuthithum R. Global stabilization of cascade systems by C0 partial-state feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002, 47(8): 1356–1362
- [3] Marino R, Tomei, P. Global iterative learning Control of feedback linearizable systems. In: 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, USA. IEEE, 2006: 5036-5041
- [4] Marino R, Tomei P. An iterative learning control for a class of partially feedback linearizable systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2009, 54(8): 1991-1996
- [5] Burg T, Dawson D, Hu J, De Queiroz M. An adaptive partial state-feedback controller for RLED robot manipulators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 1996, 41(7): 1024–1030
- [6] 谢明江, 代颖, 施颂椒. 机器人部分状态反馈自适应控制. *上海交通大学学报*, 2001, 35 (2): 283-287
- [7] 刘华平, 孙富春, 孙增圻, 李春文. 基于部分状态信息的模糊控制器设计. *自动化学报*, 2004, 30 (6): 999-1003
- [8] Arimoto S, Kawamura S, Miyazaki F. Bettering operation of robotics by learning. *Journal of Robotic Systems*, 1984, 12(2): 123-140
- [9] 李靖, 李俊民, 陈为胜. 随机非线性严格反馈系统的自适应神经网络输出反馈镇定. *自动化学报*, 2010, 36 (3): 450-453
- [10] 张玉东, 方勇纯. 一类输出饱和系统的学习控制算法研究. *自动化学报*, 2011, 37 (1): 92-98
- [11] French M, Rogers E. Nonlinear iterative learning by an adaptive Lyapunov technique, *International Journal of Control*, 2000 73 (10):840-850
- [12] Xu J X, Tan Y. A composite energy function-based learning control approach for nonlinear systems with time-varying parametric uncertainties, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2002 47(11): 1940-1945
- [13] Xu J X, Xu J. On iterative learning from different tracking tasks in the presence of time-varying uncertainties. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-part B: Cybernetics*, 2004 34(1):589 - 597
- [14] Yin C K, Xu J X, Hou Z S. A high-order internal model based learning control scheme for nonlinear systems with time-iteration-varying parameters. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2010, 55(11): 2665-2670
- [15] 孙明轩, 严求真. 迭代学习控制系统的误差跟踪设计方法. *自动化学报*, 2013, 39 (3): 251-262
- [16] 严求真, 孙明轩. 一类非线性系统的误差轨迹跟踪鲁棒学习控制算法. *控制理论与应用*, 2013, 30(1): 23-30
- [17] Ham C, Qu Z H. A new learning control based on the Lyapunov direct method. In: Proceedings of Southcon '94 Conference Record. Orlando: IEEE, 1994. 121-125
- [18] Xu J X, Yan R. On repetitive learning control for periodic tracking tasks. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2006, 51(11): 1842-1848
- [19] Marino R, Tomei P, Verrelli C M. Robust adaptive learning control for nonlinear systems with extended matching unstructured uncertainties. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2012, 22(6): 645 - 675
- [20] Liuzzo S, Marino R, Tomei P. Adaptive learning control of nonlinear systems by output error feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2007, 52(7): 1232 - 1248
- [21] 陈彭年, 秦化淑, 方学毅. 控制增益时变的非线性系统的迭代学习控制. *系统科学与数学*, 2012, 32(6): 693-704
- [22] 严求真, 孙明轩. 非线性不确定系统准最优学习控制. *自动化学报*, 2015, 41(9): 1659-1668
- [23] Jin X, Xu J X. Iterative learning control for output-constrained systems with both parametric and non-parametric uncertainties. *Automatica*, 2013, 49(8): 2508 - 2516
- [24] Xu J X, Jin X. State-constrained iterative learning control for a class of MIMO systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2013, 58(5): 1322 - 1327
- [25] 孙明轩, 张伟博, 严求真. 非参数不确定系统约束迭代学习控制. *控制理论与应用*, 2014, 31 (4): 479-484
- [26] 严求真, 孙明轩. 非参数不确定系统状态受限误差跟踪学习控制方法. *控制理论与应用*, 2015, 32 (7): 895-901
- [27] Dixon W E, Zergeroglu E, Dawson D M, et al. Repetitive learning control: a Lyapunov-based approach. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-part B: Cybernetics*, 2002, 32(4): 538-545
- [28] Sun M X, Ge S S, Mareels I M Y. Adaptive repetitive learning control of robotic manipulators without the requirement for initial repositioning. *IEEE Transactions on Robotics*, 2006, 22(3): 563-568
- [29] 朱胜, 王雪洁, 刘玮. 周期时变系统的鲁棒自适应重复控制. *自动化学报*, 2014, 40(11): 2391-2403